ЛЕКЦИЯ-1

Меншіксіз интегралдар

Анықталған интегралда интегралдау аралығы шекті және интеграл астындағы функция берілген аралықта шектелген деп жориды. Егер осы екі шарттың жоқ дегенде біреуі орындалмаса, онда анықталған интеграл анықтамасының мағынасы болмайды. Себебі аралық шексіз болса, оның ұзындықтары шектелген n бөлікке бөлу мүмкін емес, ал функция шексіз болса, онда интегралдық қосындының шекті шегі болмайтыны белгілі. Алайда жоғарыдағы жағдайларда анықталған интеграл ұғымын жалпылап, меншіксіз интеграл ұғымы енгізіледі.

Бірінші текті меншіксіз интегралдар

Айталық $f(x)$ функциясы $[a,+\infty)$ жартытүзуде анықталған және осы аралықта жатқан кез келген $[a,b],\ (b>a)$ кесіндісінде интегралданады, оны төмендегідей белгілейік:

$$F(b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Анықтама. Егер $b\to+\infty$ тиянақты шек

$$\lim_{b\to+\infty} F(b)=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

бар болса, оны $f(x)$ функциясынан $[a,+\infty)$ жартытүзуінде алынған бірінші текті меншіксіз интегралы деп атайды және

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{2}$$

түрінде белгілейді.

Бұл жағдайда меншіксіз интегралды жинақты деп атайды, яғни

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\,. \tag{3}$$

Егер (1) шек болмаса немесе ол шексіздікке тең болса, меншіксіз интегралды жинақсыз деп атайды. Жоғарыдағыдай меншіксіз интегралдар $(-\infty,b]$ жартытүзуде және шексіз $(-\infty,+\infty)$ түзуде анықталады:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx\,. \tag{5}$$

Айталық c кез келген нақты сан және $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx,\ \int_c^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралдар жинақты, онда жоғарыдағы анықтамалардан меншіксіз $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ интеграл да жинақты және $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_c^{+\infty} f(x)dx$ теңдік орындалатыны шығады.

САТЫҒҰЛОВА С.С., ИСКАКОВА А.Қ., АЙТЖАНОВ С

Егер меншіксіз интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ жинақты және кез келген $c>a$ сан болса, онда меншіксіз интеграл $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ да жинақты және

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^{+\infty} f(x)dx$$

теңдігі орынды.

Меншіксіз интегралдың жинақты немесе жинақсыздығын тағайындау процесін меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттеу дейді.

1-мысал. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттейік.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty} arctgx\ \Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty} arctgb=\frac{\pi}{2}.$$

Демек, меншіксіз интеграл жинақты.

2-мысал. $\int_0^{+\infty}\cos xdx$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттейік.

Анықтама бойынша

$$\int_0^{+\infty}\cos xdx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\cos xdx=\lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\sin b.$$

Бұл шектің тиянақты шегі жоқ, сондықтан меншіксіз интеграл жинақсыз.

3-мысал. α қайсы мәндерінде $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha},\ (\alpha>0)$ меншіксіз интеграл жинақты?

$\alpha\neq 1$ болсын.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}\lim_{b\to+\infty}x^{1-\alpha}\Big|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}(b^{1-\alpha}-1).$$

Егер $\alpha>1$ болса, онда меншіксіз интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$ жинақты.

Егер $\alpha<1$ болса, меншіксіз интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\infty$ жинақсыз.

Егер $\alpha=1$ болса, онда $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b=\infty,$ интеграл жинақсыз.

Сонымен,

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\alpha\le 1\ \textit{болғанда, жинақсыз},\\ \alpha>1\ \textit{болғанда, жинақты}.\end{cases}$$

4-мысал. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ меншіксіз интегралды жинақтылыққа зерттейік.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Бірінші интегралды есептейік

САТЫҒҰЛОВА С.С., ИСКАКОВА А.К., АЙТЖАНОВ С

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty} arctgx\Big|_{a}^{0}=\frac{\pi}{2}.$$

Екінші интеграл $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$.

Демек,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

меншіксіз интеграл жинақты.

САТЫҒҰЛОВА С.С., ИСКАКОВА А.Қ., АЙТЖАНОВ С